

MMF – ćwiczenia nr 1 - Równania różnicowe

1. Rozwiązać równania różnicowe pierwszego rzędu:

(a) $y_{n+1} - y_n = 1$, $y_1 = 1$

(b) $y_{n+1} - ny_n = n!$, $y_1 = 1$

Wsk. Podzielić równanie przez $n!$ i podstawić $z_n = y_n / (n-1)!$

2. Rozwiązać równania różnicowe drugiego rzędu:

(a) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$

(b) $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ (ciąg Fibonacciego).

(c) $y_n^2 = y_{n-1}y_{n+1}$, $y_0 = 4$, $y_1 = 1$

Wsk. Zlogarytmować równanie i potem podstawić $z = \ln y$.

3. Rozwiązać równanie: $y(n) = y\left(\frac{n}{2}\right) + n$, $y(1) = 3$. Wsk. Podstawić $n = 2^k$, po czym rozwiązać równanie na y_k .

4. Obliczyć wyznacznik D_n zdefiniowany jako:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & & \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \dots \\ | \dots \dots \dots & & & & & \\ | & & & & & 1 & 4 & | n \times n \end{vmatrix}$$

1. Znaleźć graficznie liczby: z^3 , $\sqrt[3]{z}$, $\ln z$ dla (a) $z = (-4, 0)$ oraz (b) $z = (1, \sqrt{3})$.
2. Rozwiązać równania na x : $e^{ix} = 1$, $e^{ix} = -1$, $e^{ix} = i$.
3. Wyrazić przez „zwykłe” funkcje trygonometryczne/hiperboliczne następujące wyrażenia:

$$\sin(ix), \cos(ix), \operatorname{tg}(ix), \operatorname{sh}(ix), \operatorname{ch}(ix), \operatorname{th}(ix).$$

4. Oszacować wartość wyrażenia $W = |\sin(i+\pi/4)|$.
5. Znaleźć obraz odcinka L przy odwzorowaniu $F(z)$, jeśli:

(a) $F(z) = e^z$, L – odcinek AB o końcach $A=(1, 0)$, $B = (1, \pi)$ lub
 L – prosta o równaniu $y = \pi/2$.

(b) $F(z) = e^{iz}$, L – odcinek AB o końcach $A=(\pi, 0)$, $B = (\pi, 1)$.

(c) $F(z) = i\bar{z}$, L – oś Oy .

6. Stosując metodę funkcji zespolonych rozwiązać równanie: $x''' + 2\gamma x' + \beta x = F \cos \omega t$.
Wsk. Dokonać zamiany: x na $z=x+iy$ oraz $\cos \omega t$ na $e^{i\omega t}$.

7. Obliczyć całki:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2 + \sin \varphi}, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2 + 4}, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i)^2} dx.$$

MMF – ćwiczenia nr 3

Funkcje Eulera

Wyrazić przez funkcje Eulera, a następnie uprościć, całki:

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx, \quad 2. \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx, \quad 3. \int_0^1 (-\ln t)^{3/2} dt, \quad 4. \int_0^{\pi/2} (\tan t)^{1/3} dt,$$
$$5. \int_0^1 (1-\sqrt{t})^{1/3} dt, \quad 6. \int_{-1}^1 (1-t)^{1/3} (1+t)^{-1/2} dt$$

7. Wyprowadzić zwarty wzór na „silnię” $\Gamma(-n + 1/2)$.

8. Obliczyć x , dla którego wyrażenie $\ln\left(\frac{N}{x}\right)$ osiąga maksimum.

MMF – ćwiczenia nr 4

Transformacja Laplace’a

1. Obliczyć transformaty Laplace’a funkcji: $f(t) = t \sin \omega t$, $g(t) = \sinh \omega t$, $h(t) = \cosh \omega t$

2. Znaleźć funkcję $f(t)$, dla której transformata Laplace’a wynosi;

$$\tilde{f}(s) = \frac{s+1}{s^2+2s}, \quad \tilde{f}(s) = \frac{s^3+2s}{(s^2+1)^2}, \quad \tilde{f}(s) = \frac{s}{s^2+4s+13}.$$

3. Metodą transformat Laplace’a rozwiązać równania:

$$(a) \quad f'' + f' = t^2 + 2t, \quad f(0) = 4, \quad f'(0) = -2,$$

$$(b) \quad f'' - f' - 6f = 2, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0,$$

$$(c) \quad f'' + f = t, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2.$$

4. Podobną metodą rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} f' + 2g &= 3t \\ g' - 2f &= 4 \end{aligned} \quad f(0) = 2, \quad g(0) = 3.$$

5. Określić przebieg natężenia prądu elektrycznego $I(t)$ w obwodzie RC , podłączonym do stałego napięcia U_0 . Przyjąć, że początkowo kondensator nie był naładowany: $Q(0) = 0$.

6. Określić przebieg natężenia prądu elektrycznego $I(t)$ w obwodzie RL , podłączonym do zmiennego napięcia $U(t) = U_0 \sin \omega t$. Przyjąć, że $I(0) = 0$.

1. Zortogonalizować wielomiany: $1 ; x ; x^2$ dla $x \in \langle -1,1 \rangle$.
2. Napisać równania różniczkowe dla wielomianów Laguerre'a i Czebyszewa.
3. Podać rozwiązanie równania: $(1-x^2)f'' - 2xf' + 12f = 0$, $f(0)=0$, $x \in \langle -1,1 \rangle$.
4. Korzystając ze wzoru Rodriguesa obliczyć współczynniki a_n i b_n przy pierwszych dwóch najwyższych potęgach wielomianów Legendre'a P_n i Laguerre'a L_n^m ($m = 0, 1, 2, \dots$).
5. Obliczyć wartość wielomianu L_n^m ($m = 0, 1, 2, \dots$) dla $x = 0$.
6. Obliczyć kwadraty norm wielomianów Laguerre'a i Czebyszewa: $\|L_n^m\|^2$ oraz $\|P_n\|^2$.
7. Napisać związki rekurencyjne dla wielomianów Laguerre'a i Czebyszewa.
8. Korzystając ze związków rekurencyjnych dla wielomianów obliczyć całki:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H_1(x) H_3(x) dx ,$$

$$(b) \int_0^{\infty} e^{-x} x^2 L_2^1(x) L_3^1(x) dx .$$

9. Korzystając z odpowiednich funkcji tworzących obliczyć $P_n(\pm 1)$; $H_n(0)$; $L_n^0(0)$; $L_n^1(0)$.
10. Korzystając z równania rekurencyjnego dla wielomianów Czebyszewa sprawdzić wzór:

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) , \quad n > 1, \quad T_0(x) = 1.$$

11. Określić wszystkie miejsca zerowe wielomianu $T_5(x)$, $x \in \langle -1,1 \rangle$.
12. Sprawdzić rozwinięcie dla funkcji tworzącej dla wielomianów Czebyszewa:

$$\frac{4-w^2}{4-wx+w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n T_n(x) .$$

Wsk. Pomnożyć całe równanie przez mianownik lewej strony, a następnie przyrównywać współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej w po obu stronach otrzymanej równości. Porównać wyniki z równaniem rekurencyjnym dla tych wielomianów.

MMF – ćwiczenia nr 7 - Funkcje sferyczne

1. Napisać jawne wzory na wszystkie funkcje sferyczne $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ wywodzące się z wielomianu Legendre'a $P_2(t)$, gdzie $t = \cos \theta$.
2. Obliczyć normę $\|Y_{2,1}\|$.
3. Wyrazić wielomian $P_l(t)$ przez funkcje sferyczne $Y_{lm}(t, \varphi)$.
4. Wyrazić funkcję $f(x, y, z) = xy$ przez funkcje sferyczne $Y_{lm}(\theta, \varphi)$.
5. Na sferze jednostkowej zaznaczyć punkty, gdzie $Y_{2,1}(\theta, \varphi) = 0$.
6. Sprawdzić, że równanie Laplace'a jest spełnione również przez funkcję $f(r, \theta, \varphi) = r^{-l-1} Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ [niezależnie od funkcji $f(r, \theta, \varphi) = r^l Y_{l,m}(\theta, \varphi)$].
7. Wykazać, że funkcje sferyczne są funkcjami własnymi operatora trzeciej składowej L_3 momentu pędu, tzn. że $L_3 Y_{l,m} = m\hbar Y_{l,m}$ (\hbar - stała Plancka podzielona przez 2π), gdzie $L_3 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$.
8. Sprawdzić, że funkcja $f(x, y, z) = \int_0^{2\pi} (z + ix \cos u + iy \sin u)^l e^{imu} du$ spełnia równanie Laplace'a. Na tej podstawie podać – z dokładnością do stałej - całkowite przedstawienie funkcji sferycznych.

MMF – ćwiczenia nr 8 – 9 - Funkcje Bessela

1. Wykazać, że $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ (n – liczba naturalna).
2. Podać (nieosobliwe) rozwiązanie równania: $x^2 f'' + xf' + (4x^2 - 9)f = 0$.
3. Podać szereg Bessela dla równania: $x^2 f'' + xf' - (x^2 + v^2)f = 0$.
4. Wyrazić funkcje $\sin x$ oraz $\cos x$ przez funkcje Bessela (we wzorze na funkcję tworzącą podstawić $w = i$).
5. Wykazać, że $J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n-k}(x) J_k(y)$. (Wsk. Funkcje tworzące).
6. Zapisać w postaci szeregu liczbowego całkę $I = \int_0^{2\pi} \cos(2 \sin \varphi - 3\varphi) d\varphi$.
7. Wykazać, że transformata Laplace'a funkcji Bessela $J_0(t)$ wynosi $\tilde{J}_0(s) = 1/\sqrt{s^2 + 1}$, zaś funkcji $J_0(2\sqrt{t})$ wynosi $\frac{1}{s} e^{1/s}$.
8. Wyrazić przez funkcje elementarne funkcję $J_{-3/2}(x)$.
9. Znaleźć dwa związki między funkcjami J_0 oraz J_1 . (Wsk. Wzory rekurencyjne dla funkcji Bessela).
10. Udowodnić, że $J_{v+1} + J_{v-1} = \frac{2v}{x} J_v$.
11. To samo dla sferycznych funkcji Bessela: $j_{l+1} + j_{l-1} = \frac{2l+1}{x} j_l$.
12. Rozwiązać równanie: $R'' + \frac{2}{r} R' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0$ $R = R(r)$.

Wsk. Dokonać zamiany zmiennych: $r \rightarrow y = kr$, $R \rightarrow S = \sqrt{y} R$,

czyli $r = \frac{y}{k}$, $R = y^{-1/2} S$.

13. Sprawdzić ortogonalność funkcji $J_{1/2}(2x)$ oraz $J_{1/2}(x)$ dla $L = 1$.

MMF – ćwiczenia nr 10 - 11 - Dystrybucje

1. Sporządzić wykresy funkcji: $\theta(-x)$, $\theta(x^2 - a^2)$, $\theta(a^2 - x^2)$, $\theta(-x^2 + 4x - 3)$, gdzie $\theta(x)$ – funkcja schodkowa Heaviside'a.
2. Obliczyć sploty dwóch ciągów (a_n) i (b_n) : $a * a$ oraz $a * b$, gdzie $a_n = \delta_{1,n} + \delta_{2,n}$, $b_n = \delta_{1,n} + 2\delta_{2,n} - \delta_{3,n}$, n – liczba całkowita.

3. Obliczyć sploty funkcyjne $f * g$ dla:

$$(a) f(x) = \theta(1 - x^2), \quad g(x) = \theta(x) \qquad (b) f(x) = x^2 \theta(1 - x^2), \quad g(x) = x \theta(x),$$

$$(c) f(x) = G_\alpha(x), \quad g(x) = G_\beta(x), \quad G - \text{funkcja Gaussa równa } G_\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} e^{-x^2/2\gamma}.$$

Na podstawie otrzymanego wyniku napisać zwarty wzór na n – krotny splot:

$$G_\alpha * G_\alpha * \dots * G_\alpha.$$

4. Obliczyć wartości główne całek:

$$(a) I = P \int_0^4 \frac{dx}{x-1}, \quad (b) I = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1}. \quad \text{Porównaj z całką: } \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^{2A} \frac{x dx}{x^2 + 1}.$$

5. Znaleźć granice ciągów przy $n \rightarrow \infty$: (a) $P \frac{\cos nx}{x}$ (b) $P \frac{\cos(x/n)}{x}$.

6. Znaleźć granice ciągów dystrybucyjnych: (a) $f_n(x) = n e^{-n|x-1|}$, (b) $f_n(x) = n e^{-|nx-1|}$.

7. Napisać ciąg δ -podobny (δ_ϵ) startując z funkcji ($-f'_F(x)$), gdzie funkcja Fermiego

$$f_F(x) = \frac{1}{e^x + 1}.$$

8. Uprościć iloczyny: $A = x \delta(3 - 2x)$, $B = x \delta(x^2 - 4)$, $C = \sin(\pi x) \delta(x^2 - 4)$

9. Uprościć sploty: $A = x * \delta(3 - 2x)$, $B = x * \delta(x^2 - 4)$, $C = \sin(\pi x) * \delta(x^2 - 4)$

10. Naszkicować wykresy pierwszej i drugiej pochodnej dystrybucyjnej dla funkcji:

$$(a) f(x) = e^{-|x|}, \quad (b) f(x) = \theta(\pi^2 - x^2) \sin x.$$

11. Obliczyć pochodną dystrybucyjną funkcji $f(x) = \ln(|x|)$.

12. Uprościć wyrażenia: $A = x \delta''(x)$, $B = x^2 \delta''(x)$ $C = x^3 \delta''(x)$.

13. Rozwiązać równanie: $\Delta f(\vec{r}) \pm k^2 f(\vec{r}) = -\delta(r)$

$$(\text{Wsk. Skorzystać ze wzoru na laplasjan funkcji } f_o(r) = \frac{1}{r} e^{-\alpha r} : \Delta f_o = \alpha^2 f_o - 4\pi \delta(r)).$$

MMF – ćwiczenia nr 12 - Transformacja Fouriera

1. Obliczyć transformaty Fouriera dla funkcji:

$$(a) f(x) = e^{-|x|}, \quad (b) f(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

$$(c) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad (d) f(x) = \frac{\cos x}{x^2 + 1}.$$

2. Obliczyć dwuwymiarowe transformaty Fouriera dla funkcji:

$$(a) f(x, y) = \theta(R - r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (b) f(x, y) = \frac{1}{r} e^{-\alpha r}.$$

W zadaniu (b) przyjąć następującą definicję transformaty:

$$\hat{f}(\vec{q}) = \iint_{R^2} e^{-2\pi i \vec{q} \cdot \vec{r}} f(\vec{r}) d^2 \vec{r}.$$

3. Obliczyć trójwymiarowe transformaty Fouriera dla funkcji:

$$(a) f(x, y, z) = \theta(R - r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (b) f(x, y, z) = \frac{1}{r} e^{-\alpha r}.$$

4. Obliczyć dystrybucyjne transformaty Fouriera dla funkcji:

$$(a) f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}, \quad (b) f(x) = \cos^2 x,$$

$$(c) f(x) = x \sin x, \quad (d) f(x) = P \frac{1}{x}.$$

5. Znaleźć szczególne rozwiązania równania:

$$(a) f''(x) - 4f(x) = \delta(x),$$

$$(b) f''(x) + f'(x) + f(x) = \delta(x).$$

MMF – ćwiczenia nr 13 - Szeregi Fouriera

1. Napisać wykładniczy i trygonometryczny szereg Fouriera dla funkcji okresowych:

(a) $f(x) = \sin^3 x$,

(b) $f(x) = 1$ (dla $x \in \langle 0, 1 \rangle$) oraz $f(x) = 0$ (dla $x \in \langle 1, 2 \rangle$).
Okres periodyczności $L = 2$.

(c) $f(x) = x^2$, dla $x \in \langle -1, 1 \rangle$, $L = 2$.

2. Rozwinąć w (wykładniczy i trygonometryczny) szereg Fouriera dystrybucje:

(a) $f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2m - 1)$

(b) $f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\delta(x - 4m - 1) - \delta(x - 4m - 2)]$.

(c) $f(x) = \mathcal{F}(\sin x)$.

3. Napisać skończony szereg Fouriera \hat{A}_v dla ciągu $A_n = \delta_{1,n} + \delta_{2,n}$, $n, v = 0, 1, 2, \dots, N-1$.